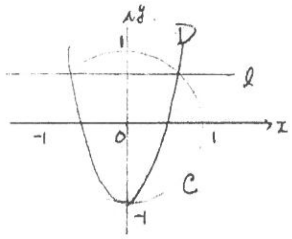
$\boxed{1}$ $a>0$

(i)
円C：$x^2+y^2=1$ ---①

曲線D：$y=ax^2-1$ ---②

aの値によらず、②は点$(0,-1)$を通る。

①も、この点を通るので、求める点の座標は$(0,-1)$である。



(ii) ①、②より x^2を消去すると

$$\frac{y+1}{a}+y^2=1$$

$$ay^2+y+1-a=0$$

$$(y+1)(ay+1-a)=0$$

$$y=-1,\ \frac{a-1}{a}$$

①、②が点$(0,-1)$以外で交点をもつとき

$$-1<\frac{a-1}{a}<1$$

$a>0$ だから $a>\frac{1}{2}$

(iii) 求める交点のy座標は $y=\frac{a-1}{a}$ だから

$$x^2=\frac{y+1}{a}=\frac{1}{a}\left(\frac{a-1}{a}+1\right)=\frac{2a-1}{a^2}$$

$$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{2a-1}}{a}$$

よって、求める交点の座標は $\left(\pm\frac{\sqrt{2a-1}}{a},\ \frac{a-1}{a}\right)$

(iv)

$$V=\pi\int_{-1}^{\frac{a-1}{a}}x^2\,dy$$

$$=\pi\int_{-1}^{\frac{a-1}{a}}\frac{y+1}{a}\,dy$$

$$=\frac{\pi}{a}\left[\frac{y^2}{2}+y\right]_{-1}^{\frac{a-1}{a}}$$

$$=\frac{\pi}{a}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a-1}{a}\right)^2-(-1)^2\right\}+\left\{\frac{a-1}{a}-(-1)\right\}\right]$$

$$=\frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2}\times\frac{-2a+1}{a^2}+\frac{2a-1}{a}\right)$$

$$=\frac{\pi\cdot(2a-1)^2}{2a^3}$$

(v) $f(a)=\frac{(2a-1)^2}{a^3}$ とおく

$$f'(a)=\frac{2(2a-1)\cdot2\cdot a^3-(2a-1)^2\cdot3a^2}{(a^3)^2}$$

$$=\frac{4a(2a-1)-3(2a-1)^2}{a^4}$$

$$=\frac{-(2a-1)(2a-3)}{a^4}$$

$f'(a)=0$, $a>\frac{1}{2}$ より $a=\frac{3}{2}$

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$		$+$	0	$-$
$f(a)$		↗	極大	↘

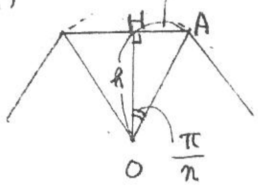
$a=\frac{3}{2}$のとき $f(a)$は極大かつ最大となる

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{32}{27}$ だから

Vの最大値は $\frac{\pi}{2}\times\frac{32}{27}=\frac{16}{27}\pi$

2

(i)



正n角形P_nの辺の長さの和がLだから，1辺の長さは$\frac{L}{n}$である

直角三角形OHAで

$$\tan\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{n}}{h}$$

$$\therefore h = \frac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}}$$

(ii) $S(n) = \frac{1}{2}\times\frac{L}{n}\times h \times n$

$$= \frac{L}{2}\times\frac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}$$

(iii) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\times x - \tan x \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} \quad \text{---- ①}$$

ここで $g(x) = x - \sin x\cos x$ とおく．

$$g'(x) = 1 - \{\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x)\}$$

$$= 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 1 - \cos 2x$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$より $0<2x<\pi$ だから $-1<\cos 2x<1$

$\therefore g'(x) > 0$ ($g(x)$は単調増加)

さらに $g(0)=0$ だから $g(x)>0$ となる．

よって①から $f'(x)>0$ となり

$f(x)$は $0<x<\frac{\pi}{2}$ で単調増加となる．

(iv)

$$\frac{S(n+1)}{S(n)} = \frac{\dfrac{L^2}{4(n+1)\tan\frac{\pi}{n+1}}}{\dfrac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}}$$

$$= \frac{n\tan\frac{\pi}{n}}{(n+1)\tan\frac{\pi}{n+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}}{\dfrac{\tan\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}}}$$

(iii) より $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ が単調増加だから

$$\frac{S(n+1)}{S(n)} > 1 \quad \therefore S(n+1) > S(n)$$

(v)

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{L^2}{\dfrac{4n}{\cos\frac{\pi}{n}}\times\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\times\frac{\pi}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{L^2}{\dfrac{4\pi}{\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}} \quad \left(\begin{array}{l} n\to\infty \text{のとき} \\ \frac{\pi}{n}\to 0 \end{array}\right)$$

$$= \frac{L^2}{4\pi}$$

$\boxed{3}$

(i) $|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2-4\sqrt{3}S$

$=(1+t^2)+(1+t^2-2t\cos\theta)-4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot t\sin\theta$

$=2t^2-2t\cos\theta-2\sqrt{3}t\sin\theta+2$

(ii) $f(\theta)=-2t(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)+2t^2+2$

$=-4t\sin(\theta+\frac{\pi}{6})+2t^2+2$

$0<\theta<\pi$ より $\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7}{6}\pi$ で

$t>0$ であるから $\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ すなわち

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき $f(\theta)$ は最小値 $2t^2-4t+2$

(iii) $|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{BP}|^2$

$=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|^2$

$=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$

$+|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=3|\overrightarrow{OP}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2$

$=3\left|\overrightarrow{OP}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}\right|^2-\frac{|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2}{3}+|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2$

$=3\left|\overrightarrow{OP}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}\right|^2+\frac{2}{3}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$

よって $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$ のとき最小値 $\frac{2}{3}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$

$\therefore\ \vec{x}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$ のとき最小値 $\frac{2}{3}(t^2-t\cos\theta+1)$

(iv) (iii)より

$|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{BP}|^2\geqq\frac{2}{3}(t^2-t\cos\theta+1)$

(等号成立は $\vec{x}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$ のとき)

また $\frac{4\sqrt{3}}{3}S=\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot t\sin\theta$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}t\sin\theta$

$\frac{2}{3}(t^2-t\cos\theta+1)-\frac{2\sqrt{3}}{3}t\sin\theta$

$=\frac{2}{3}\{t^2-t(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)+1\}$

$=\frac{2}{3}\{t^2-2t\sin(\theta+\frac{\pi}{6})+1\}$

$=\frac{2}{3}\{t-\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\}^2+\frac{2}{3}\{1-\sin^2(\theta+\frac{\pi}{6})\}$

$\geqq0$

$\therefore\ \frac{2}{3}(t^2-t\cos\theta+1)\geqq\frac{2\sqrt{3}}{3}t\sin\theta$

等号成立は $t=\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$ かつ $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=\pm1$

$\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7}{6}\pi$ より $\theta=\frac{\pi}{3}$ のときで

このとき $t=1$

よって $\theta=\frac{\pi}{3}$, $t=1$ のとき

ゆえに $|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{BP}|^2\geqq\frac{4\sqrt{3}}{3}S$

等号成立は $\vec{x}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$, $t=1$, $\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき

4

(i) 「A社製が正解ではい」と答えるか、
または「B社製が不正解ではい」と答える
確率であるから

$$\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}=\frac{17}{20}$$

(ii) 答えが「はい」であったとき、A社製が「はい」と答えた条件つき確率であるから

$$\frac{\frac{4}{10}}{\frac{17}{20}}=\frac{8}{17}$$

(iii) 「はい」と答える確率は

① Aの道を指したとき
「A社製が正解ではい」と答えるか、
または「B社製が不正解ではい」と答える

② Bの道を指したとき
「A社製が不正解ではい」と答えるか、
または「B社製が正解ではい」と答える

①②のいずれかであるから

$$\frac{1}{2}\times\frac{17}{20}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

答えが「はい」であったとき指した道がAで「はい」と答える条件つき確率であるから

$$\frac{\frac{17}{40}}{\frac{1}{2}}=\frac{17}{20}$$

(iv) どちらの質問にも「はい」と答える確率は

$$\frac{17}{20}\times\frac{1}{2}=\frac{17}{40}.$$

また、どちらの質問にも「はい」と答えて、A社の道を指すのは
「A社製が1問目に正解ではいと答え、2問目にA社の道を指して正解ではいと答える」か、
または
「B社製が1問目に不正解ではいと答え、2問目にA社の道を指して不正解ではいと答える」かのいずれかであるから

$$\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}=\frac{145}{400}$$

よっていずれの質問にも「はい」と答えたとき、指した道がA社への道である条件つき確率は

$$\frac{\frac{145}{400}}{\frac{17}{40}}=\frac{29}{34}$$

(v) 考えられる場合は

	はい	いいえ
①	A社製	A社製
②	A社製	B社製
③	B社製	A社製
④	B社製	B社製

①の確率は $\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{8}{250}$

②の確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{500}$

③の確率は $\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{108}{500}$

④の確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}\times\frac{2}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{18}{1000}$

よって確率は $\frac{8}{250}+\frac{3}{500}+\frac{108}{500}+\frac{18}{1000}=\frac{272}{1000}$

ゆえに2体ともA社製である条件つき確率は

$$\frac{\frac{8}{250}}{\frac{272}{1000}}=\frac{2}{17}$$