〔1〕

(1) $f'(x) = 6x^2+6x-36 = 6(x+3)(x-2)$

増減表は以下のとおり

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 (82)	↘	極小 (−43)	↗

極値をとるときの x の値は

$x=-3,\ 2$ …(答)

また、極大値 82, 極小値 −43 …(答)

(2) $C: y = \begin{cases} x^2-1 & (x \leqq -1,\ 1 \leqq x) \\ -x^2+1 & (-1 < x < 1) \end{cases}$

また、$l: y-1 = 1\cdot(x+1)$ すなわち $y = x+1$

C と l の共有点の x 座標を求める

i) $x \leqq -1,\ 1 \leqq x$ …① のとき

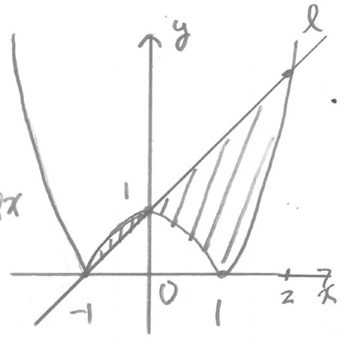
$x^2-1 = x+1$ すなわち $x^2-x-2=0$

よって $x=-1,\ 2$ (ともに①をみたす)

ii) $-1 < x < 1$ …② のとき

$-x^2+1 = x+1$ すなわち $x^2+x=0$

よって、$x=0,\ -1$ ②より $x=0$



求める面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^{0}\{-x^2+1-(x+1)\}dx + \int_{0}^{1}\{x+1-(-x^2+1)\}dx + \int_{1}^{2}\{x+1-(x^2-1)\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} + \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{1}^{2} = \frac{13}{6}$$ …(答)

〔2〕

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(1,1,-1)+(3,1,1)=(4,2,0)\,/\!/\,(2,1,0)$ ($=\overrightarrow{m}$ とおく)

$\overrightarrow{n}=(1,-2,a)$ (aは実数) は $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{m}=0$ をみたし, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-1-a=0$ より $a=-1$

すなわち, $\overrightarrow{n}=(1,-2,-1)$ は α の法線ベクトルの一つなので, 条件より $\overrightarrow{OP}\,/\!/\,\overrightarrow{n}$

よって $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{n}=k(1,-2,-1)$ (kは実数) とおける。

このとき, $P(k,-2k,-k)$ で, 条件より $-2k\leqq-1$ すなわち $k\geqq\frac{1}{2}$

点Pは球面S上にあるので,

$$(k-1)^2+(-2k+1)^2+(-k+1)^2=1$$

$$6k^2-8k+2=0,\quad 2(3k-1)(k-1)=0,\quad k=\frac{1}{3}\text{ または }1$$

$k\geqq\frac{1}{2}$ をみたすのは $k=1$ であるので, $P(1,-2,-1)$ …(答)

(2) $\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

$PH\perp\alpha$ すなわち $\begin{cases}PH\perp AB\\ PH\perp AC\end{cases}$ より $\begin{cases}\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

$\begin{cases}(\overrightarrow{PA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ (\overrightarrow{PA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ $\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2s+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})t=0\\ \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})s+|\overrightarrow{AC}|^2t=0\end{cases}$

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=(1,1,1)-(1,-2,-1)=(0,3,2)$ より, $\begin{cases}1+3s+3t=0 & \cdots①\\ 5+3s+11t=0 & \cdots②\end{cases}$

②−①より $4+8t=0$, $t=-\frac{1}{2}$ で, ①より $3s=\frac{1}{2}$, $s=\frac{1}{6}$

以上より, $s=\frac{1}{6}$, $t=-\frac{1}{2}$ …(答)

(3) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3\times11-3^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\sqrt{2}=\sqrt{6}$

また, (2)より $\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{PA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{4}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}(-1,2,1)$ なので

$$PH=|\overrightarrow{PH}|=\frac{4}{3}\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

したがって, 四面体ABCPの体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times PH=\frac{1}{3}\times\sqrt{6}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}=\frac{8}{3}\ \cdots(答)$$

〔3〕

(1) $\sqrt{2}$が無理数でない、すなわち有理数であると仮定すると

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p}\quad（p\text{と}q\text{は互いに素な自然数}）$$

とおけて、分母を払って2乗すると、$2p^2=q^2$ …①

qは2の倍数だから、自然数rを用いて$q=2r$とおくと、①より $2p^2=4r^2$

よって、$p^2=2r^2$となるから、pも2の倍数となるが、これはpとqが互いに素であることに矛盾する。よって、$\sqrt{2}$は有理数でない、すなわち無理数である。（証明終）

(2) 二項定理により展開する。$a_n=(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n$とする。

i) nが偶数のとき、$n=2k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ とすると

$$(\sqrt{2}+1)^{2k}={}_{2k}C_0(\sqrt{2})^{2k}+{}_{2k}C_1(\sqrt{2})^{2k-1}+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}\sqrt{2}+{}_{2k}C_{2k}$$

$$(\sqrt{2}-1)^{2k}={}_{2k}C_0(\sqrt{2})^{2k}-{}_{2k}C_1(\sqrt{2})^{2k-1}+\cdots-{}_{2k}C_{2k-1}\sqrt{2}+{}_{2k}C_{2k}$$

$(\sqrt{2})^{2k}$、$(\sqrt{2})^{2k-2}$、…、$(\sqrt{2})^2$、$(\sqrt{2})^0$は整数であるから a_{2k}は整数である。

ii) nが奇数のとき、$n=2k-1$ $(k=1,2,3,\cdots)$ とすると

$$(\sqrt{2}+1)^{2k-1}={}_{2k-1}C_0(\sqrt{2})^{2k-1}+{}_{2k-1}C_1(\sqrt{2})^{2k-2}+\cdots+{}_{2k-1}C_{2k-2}\sqrt{2}+{}_{2k-1}C_{2k-1}$$

$$(\sqrt{2}-1)^{2k-1}={}_{2k-1}C_0(\sqrt{2})^{2k-1}-{}_{2k-1}C_1(\sqrt{2})^{2k-2}+\cdots+{}_{2k-1}C_{2k-2}\sqrt{2}-{}_{2k-1}C_{2k-1}$$

$(\sqrt{2})^{2k-1}$、$(\sqrt{2})^{2k-3}$、…、$(\sqrt{2})^3$、$(\sqrt{2})^1$は無理数であり、

${}_{2k-1}C_0>0$，${}_{2k-1}C_2>0$，…，${}_{2k-1}C_{2k-2}>0$ であるから、a_{2k-1}は無理数である。

以上より、$a_n=(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n$が整数となるための、$n$が満たすべき必要十分条件は、$n$が偶数であることである。…（答）

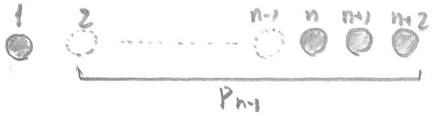
〔4〕

(1)

$P_1 = (1-r)^3$

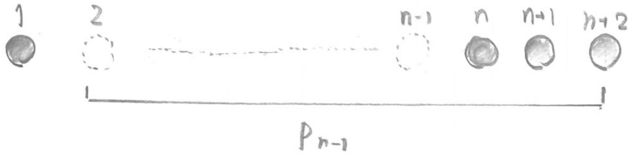
$P_2 = (1-r)^4$ …(答)

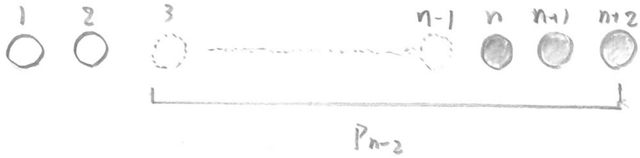
(2)



$(1-r)P_{n-1}$ …(答)

(3)





$P_n = (1-r)P_{n-1} + rP_{n-2}$ $(n \geqq 3)$ …(答)

(4) (3)より $P_n - P_{n-1} = -r(P_{n-1} - P_{n-2})$ —①

$P_n + rP_{n-1} = P_{n-1} + rP_{n-2}$ —②

(1), ①より $P_{n+1} - P_n = (P_2 - P_1)\cdot(-r)^{n-1} = (1-r)^3(-r)^n$ —③

②より $P_{n+1} + rP_n = P_2 + rP_1 = (1-r)^3$ —④

④−③より $(r+1)P_n = (1-r)^3\{1-(-r)^n\}$

$$P_n = \frac{(1-r)^3\{1-(-r)^n\}}{1+r}$$ …(答)

($n=1, 2$ のときも成り立つ)