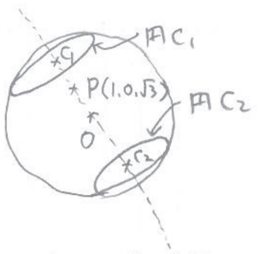
〔1〕

(1)



円C_1, C_2の中心をそれぞれC_1, C_2とおくと、C_1とC_2は原点に関して対称な位置にある。C_1のz座標は正であるから、

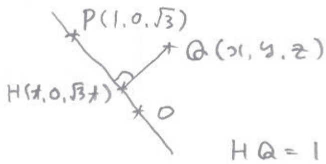
$\overrightarrow{OC_1} = k\overrightarrow{OP} = (k, 0, \sqrt{3}k)$ $(k>0)$ とおける。

条件より $OC_1^2 = 3^2 - 1^2$ であるから、

$4k^2 = 8$。$k>0$ より $k = \sqrt{2}$。

よって、$C_1(\sqrt{2}, 0, \sqrt{6})$, $C_2(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{6})$ …(答)

(2) 円柱の側面上の点を$Q(x, y, z)$とし、Qを通って直線OPに垂直な直線と直線OPの交点をHとする。Hは直線OP上の点だから、$\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OP}$ (tは実数) とおける。



$\overrightarrow{HQ} = (x-t, y, z-\sqrt{3}t)$

$\overrightarrow{HQ}\cdot\overrightarrow{OP} = 0$ より $1\cdot(x-t) + \sqrt{3}(z-\sqrt{3}t) = 0$

よって、$x + \sqrt{3}z = 4t$，$t = \frac{1}{4}(x+\sqrt{3}z)$ ……①

$HQ = 1$ より $|\overrightarrow{HQ}|^2 = 1$ だから、$(x-t)^2 + y^2 + (z-\sqrt{3}t)^2 = 1$

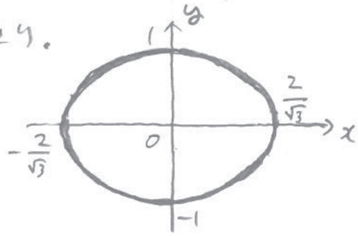
①を代入して $\left\{x - \frac{1}{4}(x+\sqrt{3}z)\right\}^2 + y^2 + \left\{z - \frac{\sqrt{3}}{4}(x+\sqrt{3}z)\right\}^2 = 1$

ここに $z=0$ を代入して、$\left(\frac{3}{4}x\right)^2 + y^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)^2 = 1$

$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$$

よって、切り口の曲線の方程式は、$\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ …(答)

図示すると次の通り。

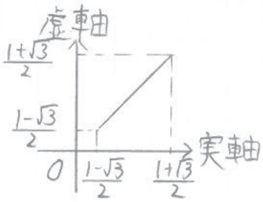


〔2〕

(1) $z^2 - wz + 1 = 0$ より $zw = z^2 + 1$

zは右の線分（両端を含む）上を動くので

$z \neq 0$ で $w = z + \frac{1}{z}$



さらに $z = t + ti = t(1+i)$ より $\frac{1}{z} = \frac{1}{t(1+i)} = \frac{1-i}{2t}$

従って $w = z + \frac{1}{z} = t(1+i) + \frac{1-i}{2t} = \left(t + \frac{1}{2t}\right) + \left(t - \frac{1}{2t}\right)i$.

つまり $w = x + yi$（x, yは実数）とおくと $x = t + \frac{1}{2t}$, $y = t - \frac{1}{2t}$ で

$t = \frac{x+y}{2}$, $\frac{1}{2t} = \frac{x-y}{2}$ を得る。よって(x, y)の満たすべき条件は

$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$ かつ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq \frac{x+y}{2} \leqq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

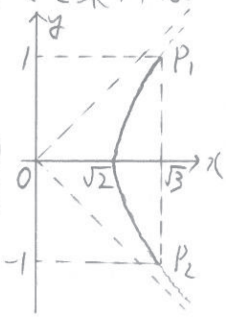
つまり $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ かつ $-1+\sqrt{3} \leqq x+y \leqq 1+\sqrt{3}$

$x+y = -1+\sqrt{3}$ のとき $x-y = \frac{2}{x+y} = 1+\sqrt{3}$. よって $(x, y) = (\sqrt{3}, -1)$

$x+y = 1+\sqrt{3}$ のとき $x-y = \frac{2}{x+y} = \sqrt{3}-1$. よって $(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$

以上より Cは $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ の $\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{3}$

の部分で右の双曲線の一部。



(2) 領域はx軸に関して対称であるから $y \geqq 0$ の部分の

体積Vの2倍である。y軸, $y=1$, 線分OP_1で囲まれる部分を

y軸の周りに1回転させると、半径が$\sqrt{3}$の円で高さ1の円錐

ができるので $V = \int_0^1 \pi x^2 dy - \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 1 = \pi\int_0^1 x^2 dy - \pi$

(1)より $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$, つまり $x^2 = y^2 + 2$ であるから

$V = \pi\int_0^1 (y^2+2)dy - \pi = \pi\left[\frac{y^3}{3} + 2y\right]_0^1 - \pi = \frac{4\pi}{3}$

以上より求める体積は $2V = \frac{8\pi}{3}$ …(答)

〔3〕

(1) 裏が3回続けて出る確率，裏が4回続けて出る確率がそれぞれ p_1, p_2 なので

$p_1=(1-r)^3$ …(答)，$p_2=(1-r)^4$ …(答)

(2) 最初に裏が出る。左から $n, n+1, n+2$ 番目の玉が黒であるのは，
左から2番目を最初として考えるとき，左から $n-1, n, n+1$ 番目の玉が黒，
ならよいのでこの確率は p_{n-1} である。

$p_n=(1-r)p_{n-1}$ …(答)

(3) p_n について，最初に裏が出るとき (2) より $(1-r)p_{n-1}$
最初に表が出るときは，左から3番目を最初として考えるとき，左から
$n-2, n-1, n$ 番目の玉が黒ならよいのでこの確率は p_{n-2} である。

$p_n=(1-r)p_{n-1}+rp_{n-2}$ …(答)

(4) $p_1=(1-r)^3$，$p_2=(1-r)^4$，$p_{n+2}=(1-r)p_{n+1}+rp_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$p_{n+2}+rp_{n+1}=p_{n+1}+rp_n$

$p_{n+1}+rp_n=p_2+rp_1$

$=(1-r)^3$ …①

$p_{n+2}-p_{n+1}=(-r)(p_{n+1}-p_n)$

$p_{n+1}-p_n=(p_2-p_1)(-r)^{n-1}$

$=(1-r)^3(-r)^n$ …②

①,②より　$p_n=\dfrac{(1-r)^3}{1+r}\{1-(-r)^n\}$ …(答)

〔4〕

(1) $5+2\sqrt{6}=(3+2)+2\sqrt{3\cdot 2}$

$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

よって $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ …（証明終）

また $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを背理法を用いて示す．$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると，有理数 p を用いて

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=p$

と表せる．両辺2乗して

$5+2\sqrt{6}=p^2$

$\sqrt{6}=\dfrac{p^2-5}{2}$

となるが，$\dfrac{p^2-5}{2}$ は有理数であり，$\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する．ゆえに $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。…（証明終）

(2) $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とおく。両辺2乗して $x^2=5+2\sqrt{6}$

$x^2-5=2\sqrt{6}$ であり，さらに2乗して $(x^2-5)^2=24$

すなわち $x^4-10x^2+1=0$ …① であり，これが $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもつ4次方程式の1つである．…（答）

① は $(x^2-5)^2=24$ から $x^2-5=\pm 2\sqrt{6}$

よって $x^2=5\pm 2\sqrt{6}$

(1)と $5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ から4次方程式の解は

$x=\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2}),\ \pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ …（答）

である．

(3) 背理法を用いて示す。

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもつ係数がすべて有理数

である2次方程式が存在すると仮定する。

a, b, c を有理数とすると

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

と表せるが $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ となり

$\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ も有理数であるから、それぞれ

有理数 p, q とおいて

$$x^2+px+q=0$$

$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が解であるから

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+p(\sqrt{2}+\sqrt{3})+q=0$$

$$q+5+2\sqrt{6}=-p(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

両辺2乗して

$$(q+5)^2+4(q+5)\sqrt{6}+24=(5+2\sqrt{6})p^2$$

$$(4q-2p^2+20)\sqrt{6}=5p^2-(q+5)^2-24 \quad \cdots ①$$

$4q-2p^2+20 \neq 0$ と仮定すると

$\sqrt{6}=\dfrac{5p^2-(q+5)^2-24}{4q-2p^2+20}$ となり（右辺）は

有理数であるから $\sqrt{6}$ が無理数であることに

矛盾する。よって $4q-2p^2+20=0 \cdots ②$ で

あり、①から $5p^2-(q+5)^2-24=0 \cdots ③$

②, ③ を解くと $(p, q)=(\pm 2\sqrt{2}, -1), (\pm 2\sqrt{3}, 1)$

となり p が有理数であることに矛盾する。

以上より $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもつ係数がすべて有理数

の2次方程式は存在しない。 …（証明終）

〔5〕

(1) $f(x)=\int_x^{x+1}\log(4t^2+1)dt$, $f'(x)=\log\{4(x+1)^2+1\}-\log(4x^2+1)$

$\{4(x+1)^2+1\}-(4x^2+1)=4(2x+1)$ であるから

$x<-\frac{1}{2}$ では $f'(x)<0$ より $f(x)$ は減少

$x>-\frac{1}{2}$ では $f'(x)>0$ より $f(x)$ は増加

よって $f(x)$ は $x=-\frac{1}{2}$ で極小となり 極小値 $f(-\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\log(4t^2+1)dt$ をとる

ここで $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\log(4t^2+1)dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}\log(4t^2+1)dt=2\left\{\left[t\log(4t^2+1)\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{8t^2}{4t^2+1}dt\right\}$

$=2\left\{\frac{1}{2}\log 2-2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{4t^2+1}\right)dt\right\}=\log 2-2+4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4t^2+1}dt$

$2t=\tan\theta$ とおけば

t	$0\to\frac{1}{2}$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{2}(1+\tan^2\theta)$

だから $4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4t^2+1}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\times\frac{1}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{2}$

以上により $f(x)$ が極値をとるときの x の値は $-\frac{1}{2}$ …(答)

またそのときの極小値は $\log 2-2+\frac{\pi}{2}$ …(答)

(2) $f(x)$ は実数全体で連続，微分可能だから，平均値の定理を用いると

$f(x)-f(x-1)=f'(s)$ $(x-1<s<x)$ となる実数 s が存在する.

ここで $f''(x)=\frac{8(x+1)}{4(x+1)^2+1}-\frac{8x}{4x^2+1}=\frac{8(-4x^2-4x+1)}{\{4(x+1)^2+1\}(4x^2+1)}$ だから

$x>2$ において $f''(x)<0$ となり $f'(x)$ は減少である.

よって $x>2$ において $x-1<s<x$ のとき $f'(x)<f'(s)<f'(x-1)$ が成立し

$xf'(x)<x\{f(x)-f(x-1)\}<xf'(x-1)$ が成り立つ.

$\lim_{x\to\infty}xf'(x)=\lim_{x\to\infty}x\log\frac{4(x+1)^2+1}{4x^2+1}=\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{8x+4}{4x^2+1}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(8x+4)}{4x^2+1}\log\left(1+\frac{8x+4}{4x^2+1}\right)^{\frac{4x^2+1}{8x+4}}$ であり $\lim_{x\to\infty}\frac{8x+4}{4x^2+1}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x(8x+4)}{4x^2+1}=2$

に注意すると $\lim_{x\to\infty}xf'(x)=2\log e=2$

同様にして $\lim_{x\to\infty}xf'(x-1)=2$ となるから，はさみうちの原理より,

$\lim_{x\to\infty}x\{f(x)-f(x-1)\}=2$ …(答)