62	数学	数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ，数学C

令和８年度入学試験問題

解答紙

（工学部）

（５枚のうち１枚目）

受験番号				

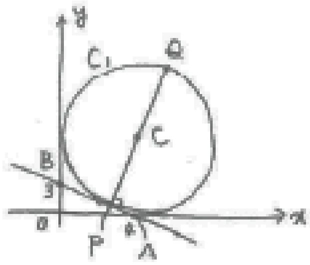
受験番号				

62

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔１〕（30点）

〔１〕の採点



(1) 円C_1はx軸，y軸に接するので

中心(r, r)，半径rとおく。

直線ABの方程式は

$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \Leftrightarrow 3x+4y-12=0$ …①

中心(r, r)から①への距離がrより

$\frac{|3r+4r-12|}{\sqrt{9+16}}=r \Leftrightarrow |7r-12|=5r$

よって，$r=1, 6$　図より $r=6$

ゆえに $C_1: (x-6)^2+(y-6)^2=36$ …(答)

(2) C_1の中心をCとすると直線PCと直線ABは垂直なので，直線PCはC(6, 6)を通り

傾き$\frac{4}{3}$より　$y=\frac{4}{3}x-2$ …②

①，②を連立してyを消去すると

$3x+4\left(\frac{4}{3}x-2\right)-12=0 \Leftrightarrow x=\frac{12}{5}$

②より $y=\frac{6}{5}$　ゆえに $P\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ …(答)

(3) C_1の半径が6より PQはC_1の直径である。

したがって，②とC_1の式を連立して

yを消去すると

$(x-6)^2+\left\{\left(\frac{4}{3}x-2\right)-6\right\}^2=36$

展開して

$\frac{25}{9}x^2-\frac{100}{3}x+64=0$ …③

③の方程式の解の1つは点Pのx座標，

だから解と係数の関係より

$\frac{12}{5}+x=\frac{100}{3}\times\frac{9}{25} \Leftrightarrow x=\frac{48}{5}$

②より $y=\frac{54}{5}$　ゆえに $Q\left(\frac{48}{5}, \frac{54}{5}\right)$ …(答)

(4) 放物線 $y=a\left(x-\frac{48}{5}\right)^2+\frac{54}{5}$

これが$P\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$を通るので

$\frac{6}{5}=a\left(-\frac{36}{5}\right)^2+\frac{54}{5}$

ゆえに $a=-\frac{5}{27}$ …(答)

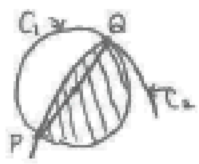
$C_2: y=-\frac{5}{27}\left(x-\frac{48}{5}\right)^2+\frac{54}{5}$ より

$y'=-\frac{10}{27}x+\frac{32}{9}=-\frac{3}{4}$ とすると

$x=\frac{93}{8}=\frac{465}{40}>\frac{384}{40}=\frac{48}{5}$

したがって C_1とC_2の共有点は点P，Q

の2点に限る。



直線PQとC_2で囲まれる面積S_1は

$S_1=\int_{\frac{12}{5}}^{\frac{48}{5}}\left\{-\frac{5}{27}\left(x-\frac{48}{5}\right)^2+\frac{54}{5}-\left(\frac{4}{3}x-2\right)\right\}dx$

$=\frac{\frac{5}{27}}{6}\left(\frac{48}{5}-\frac{12}{5}\right)^3=\frac{288}{25}$

直線PQとC_1で囲まれる面積S_2は

$S_2=\frac{36\pi}{2}=18\pi$

ゆえに，求める面積をSとすると

$S=S_1+S_2=\frac{288}{25}+18\pi$ …(答)

(1) 採点

(2) 採点

(3) 採点

(4) 採点

解答紙

(工学部)

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

【２】(30点)

【２】の採点

(1) $f(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$ とおく

$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$

$f''(x)=-\sin x+x$

$f'''(x)=-\cos x+1$

$-1\leqq\cos x\leqq 1$ より $f'''(x)\geqq 0$

よって，$f''(x)$ は単調に増加するので

$x\geqq 0$ のとき，$f''(x)\geqq f''(0)=0$

よって，$f'(x)$ は単調に増加するので

$x\geqq 0$ のとき，$f'(x)\geqq f'(0)=0$

よって，$f(x)$ は単調に増加するので

$x\geqq 0$ のとき，$f(x)\geqq f(0)=0$

以上より，

$x\geqq 0$ のとき，$\sin x\geqq x-\frac{x^3}{6}$

(証明終)

(2) $\sin a_n=\frac{1}{n}\ \left(0<a_n<\frac{\pi}{2}\right)$ より

$n=\frac{1}{\sin a_n}$

よって，$\lim_{n\to\infty} n a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sin a_n}$

$a_n=\theta$ とおくと

条件より $n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$

ゆえに，

$\lim_{n\to\infty} n a_n=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$ …(答)

(3) $g(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\sin x$ とおく

$g'(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos x$

$g''(x)=-x+\frac{x^3}{6}+\sin x=f(x)$

(1) より $x\geqq 0$ のとき，$g''(x)\geqq 0$

よって，$g'(x)$ は単調に増加するので

$x\geqq 0$ のとき，$g'(x)\geqq g'(0)=0$

よって，$g(x)$ は単調に増加するので

$x\geqq 0$ のとき $g(x)\geqq g(0)=0$

以上より

$x\geqq 0$ のとき，$\sin x\leqq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

(証明終)

(4) $b_n-\sin b_n=\frac{1}{n}\ (b_n>0)$ より

$n=\frac{1}{b_n-\sin b_n}$

よって，$n b_n^3=\frac{b_n^3}{b_n-\sin b_n}$

(1)，(3) より

$b_n-\frac{b_n^3}{6}\leqq\sin b_n\leqq b_n-\frac{b_n^3}{6}+\frac{b_n^5}{120}$

よって，$\frac{b_n^3}{6}-\frac{b_n^5}{120}\leqq b_n-\sin b_n\leqq\frac{b_n^3}{6}$

各辺 $b_n^3\ (>0)$ でわって

$\frac{1}{6}-\frac{b_n^2}{120}\leqq\frac{b_n-\sin b_n}{b_n^3}\leqq\frac{1}{6}$

ここで $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}-\frac{b_n^2}{120}\right)=\frac{1}{6}$

よって，はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-\sin b_n}{b_n^3}=\frac{1}{6}$

したがって，$\lim_{n\to\infty} n b_n^3=6$ …(答)

(1)採点

(2)採点

(3)採点

(4)採点

[３] (30点)

[３]の採点

同じ色である玉もすべて区別して考える。

赤玉をR，白玉をW，青玉をBで表す。

(1) $\underbrace{\boxed{\text{RRRRR}}\ \text{WWWBB}}_{\text{全部で6個}}$

↖ひとかたまりにする

上記の玉を一列に並べる確率と考えて，

$$\frac{6!\times5!}{10!}=\frac{5\times4\times3\times2}{10\times9\times8\times7}=\frac{1}{42}\cdots(答)$$

(2)

$$\text{R}\ \overset{1}{\downarrow}\ \underset{\uparrow}{\_}\ \overset{2}{\downarrow}\ \underset{\uparrow}{\_}\ \overset{3}{\downarrow}\ \underset{\uparrow}{\_}\ \overset{4}{\downarrow}\ \underset{\uparrow}{\_}\ \overset{5}{\downarrow}\ \underset{\uparrow}{\_}\ \overset{6}{\downarrow}\ \underset{\uparrow}{\_}\ \overset{7}{\downarrow}\ \text{R}$$

R：3個，W：3個を並べる

まず，両端にRを並べる($_5C_2\times2=5\times4$通り)。

次に，残っているR：3個とW：3個を並べて($6!$通り)，それによって生じる上図のようなすき間$\overset{1}{\downarrow}$〜$\overset{7}{\downarrow}$から2ヶ所を選んで，そこにBを1個ずつ入れ込む($_7C_2\times2=7\times6$通り)と考えて，求める確率は，

$$\frac{(5\times4)\times6!\times(7\times6)}{10!}=\frac{20\times7\times6}{10\times9\times8\times7}$$

$$=\frac{1}{6}\cdots(答)$$

(3) 事象X，Yを次のように定める。

X：青玉は隣り合わない

Y：赤玉は連続して5個並ぶ

(i) Xの起こる確率P(X)

(例) $\overset{1}{\downarrow}\text{R}\overset{2}{\downarrow}\text{W}\overset{3}{\downarrow}\text{W}\overset{4}{\downarrow}\text{R}\overset{5}{\downarrow}\text{R}\overset{6}{\downarrow}\text{W}\overset{7}{\downarrow}\text{R}\overset{8}{\downarrow}\text{R}\overset{9}{\downarrow}$

RとW(計8個)を並べ，それによって生じる上図のようなすき間$\overset{1}{\downarrow}$〜$\overset{9}{\downarrow}$から2ヶ所を選んで，そこにBを1個ずつ入れ込むと考えて，

$$P(X)=\frac{8!\times(_9C_2\times2)}{10!}=\frac{8!\times(9\times8)}{10!}$$

$$=\frac{9\times8}{10\times9}=\frac{4}{5}$$

(ii) X∩Yの起こる確率P(X∩Y)

(例) $\overset{1}{\downarrow}\text{W}\overset{2}{\downarrow}\boxed{\text{RRRRR}}\overset{3}{\downarrow}\text{W}\overset{4}{\downarrow}\text{W}\overset{5}{\downarrow}$

まず，(1)と同様に考えて，

$\boxed{\text{RRRRR}}$ とW3個(計4個)を並べ，それによって生じる上図のようなすき間$\overset{1}{\downarrow}$〜$\overset{5}{\downarrow}$から2ヶ所を選んで，そこにBを1個ずつ入れ込むと考えて，

$$P(X\cap Y)=\frac{(4!\times5!)\times(_5C_2\times2)}{10!}$$

$$=\frac{(4\times3\times2\times1)\times(5\times4)}{10\times9\times8\times7\times6}=\frac{1}{63}$$

(i)(ii)より，求める条件付き確率は

$$P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{1}{63}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{63}\times\frac{5}{4}$$

$$=\frac{5}{252}\cdots(答)$$

(1)採点

(2)採点

(3)採点

数学　数学Ⅰ，数学A　数学Ⅱ，数学B　数学Ⅲ，数学C

令和８年度入学試験問題

受験番号

受験番号

解　答　紙

（工　学　部）

（５枚のうち４枚目）

65

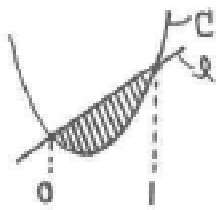
解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

【４】（30点）

【４】の採点

(1) $2x^2-x-2=x-2$ とすると

$2x(x-1)=0$ より $x=0,1$



Cとℓで囲まれた領域は左図の斜線部であり、その面積をSとすると

$S=\int_0^1\{(x-2)-(2x^2-x-2)\}dx$

$=-2\int_0^1 x(x-1)dx$

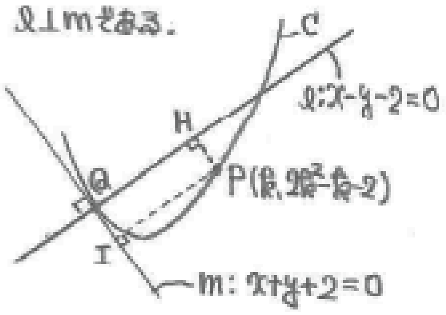
$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3$

$=\frac{1}{3}$ …(答)

(2) $y'=4x-1$ より、Qにおける

Cの接線の方程式は $m:y=-x-2$ となり

$\ell\perp m$ である。



Pからmに垂線PIを下ろすと、QH=PI

点と直線の距離の公式より

$PH=\frac{|k-(2k^2-k-2)-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=|-\sqrt{2}k^2+\sqrt{2}k|$

$0\leqq k\leqq 1$ より $-\sqrt{2}k^2+\sqrt{2}k\geqq 0$ だから

$PH=-\sqrt{2}k^2+\sqrt{2}k$ …(答)

$QH=PI=\frac{|k+(2k^2-k-2)+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}k^2$ …(答)

(3) $QH=t$ とおくと、

$t=\sqrt{2}k^2$ より $dt=2\sqrt{2}k\,dk$

求める体積をVとすると、$V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi PH^2\,dt$

よって

$\frac{V}{\pi}=\int_0^1(-\sqrt{2}k^2+\sqrt{2}k)^2\cdot 2\sqrt{2}k\,dk$

$=\int_0^1(2k^4-4k^3+2k^2)\cdot 2\sqrt{2}k\,dk$

$=4\sqrt{2}\int_0^1(k^5-2k^4+k^3)dk$

$=4\sqrt{2}\left[\frac{1}{6}k^6-\frac{2}{5}k^5+\frac{1}{4}k^4\right]_0^1$

$=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)$

$=4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{60}$

$=\frac{\sqrt{2}}{15}$

より、$V=\frac{\sqrt{2}}{15}\pi$ …(答)

(1) 採点

(2) 採点

(3) 採点

解答紙

（工学部）

（５枚のうち５枚目）

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔５〕（30点）

〔５〕の採点

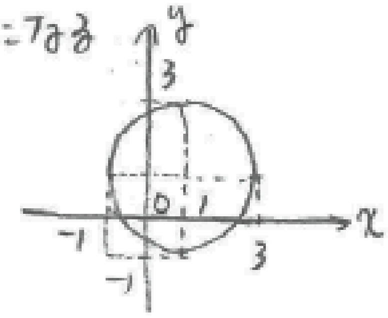
(1) $z\bar{z}-(1-i)z-(1+i)\bar{z}-2=0$

を変形して

$\{z-(1+i)\}\{\bar{z}-(1-i)\}=4$

$|z-(1+i)|^2=2^2$

となるから，Cは中心K$(1+i)$，半径2の円であり，次図のようになる



(2) $iz-1+i=i(z+1+i)$

$=i\{z-(-1-i)\}$

(1)のグラフを参照すると

$0\leqq\arg\{z-(-1-i)\}\leqq\frac{\pi}{2}$

をとりうるから

$\arg(iz-1+i)=\frac{\pi}{2}+\arg(z+1+i)$

に注意して

$\frac{\pi}{2}\leqq\arg(iz-1+i)\leqq\pi$ …(答)

をとりうる

（ただし，偏角は0以上2π未満とする）

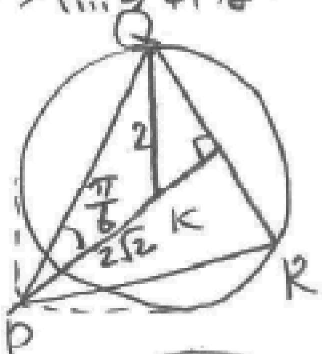
(3) P(α)，Q(β)，R(γ)が正三角形の3頂点をなすとき，

Q，Rは円C上にあるから

QRの垂直二等分線は円Cの中心Kを通り，Pを通る。

このとき次図を参照すれば

三角形PQKに注目して



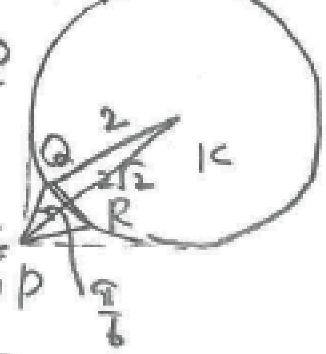
$PK=2\sqrt{2}$

$QK=2$

$\angle QPK=\frac{\pi}{6}$

だから $PQ=x$

として余弦定理を用いて



$2^2=(2\sqrt{2})^2+x^2-2\times2\sqrt{2}x\cos\frac{\pi}{6}$

$x^2-2\sqrt{6}x+4=0$

$x=\sqrt{6}\pm\sqrt{2}$ …(答)

(1) 採点

(2) 採点

(3) 採点