1

(1) $P(x)=x^2+ax+b$

$P(x^2)=x^4+ax^2+b$ —(答)

$Q(x)=x^2-ax+a^2+a-b$ —(答)

$R(x)=(-a^3-a^2+2ab)x+b^2+b-a^2b-ab$ —(答)

$P(x^2)$ が $P(x)$ で割り切れるとき

$R(x)=0$ が x についての恒等式となるので

$\begin{cases}-a^3-a^2+2ab=0\\ b^2+b-a^2b-ab=0\end{cases}$ $a\neq 0$、$b\neq 0$ より $2b=a^2+a$

$b=a^2+a-1$

よって、$2(a^2+a-1)=a^2+a$ $\therefore (a+2)(a-1)=0$

$a=-2, 1$ $a=-2$ のとき、$b=1$、$a=1$ のとき、$b=1$

$(a, b)=(-2, 1)$、$(1, 1)$ —(答)

(2) $a_{n+1}+a_n=4n$ —①

$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=\gamma(a_n+\alpha n+\beta)$

$a_{n+1}-\gamma a_n=\alpha(\gamma-1)n+\beta(\gamma-1)-\alpha$ —②

①、②が一致する条件は

$\begin{cases}-\gamma=1\\ \alpha(\gamma-1)=4\\ \beta(\gamma-1)-\alpha=0\end{cases}$ よって、$\gamma=-1$、$\alpha=-2$、$\beta=1$ —(答)

$a_{n+1}-2(n+1)+1=-(a_n-2n+1)$

$\{a_n-2n+1\}$ は初項 $a_1-2+1=4$、公比 -1 の等比数列だから

$a_n-2n+1=4(-1)^{n-1}$ $\therefore a_n=4(-1)^{n-1}+2n-1$ —(答)

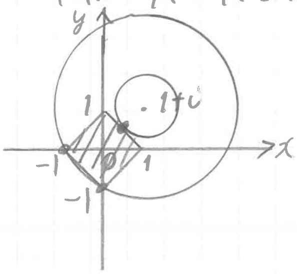
(3) (A) $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|\leqq 2$

$z=x+yi$ のとき、$\bar{z}=x-yi$ だから

$|(x+yi)+(x-yi)|+|(x+yi)-(x-yi)|\leqq 2$

$|2x|+|2iy|\leqq 2$ $\therefore |x|+|y|\leqq 1$ —(答)

4点 1、-1、i、$-i$ を頂点とする正方形の周および内部 —(答)



$|z-1-i|=|z-(1+i)|$ は

2点 z と $1+i$ の距離を表すので

$z=-1, -i$ のとき、最大値 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ —(答)、

$z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ のとき、最小値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ —(答)

(3) $ax^2-2ax+1=0$

$a\neq 0$ のとき、判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=a^2-a=a(a-1)$

$a=1$ のとき $\frac{D}{4}=0$ だから、異なる実数解の個数は 1、

$a=-1$ のとき $\frac{D}{4}=2>0$ だから、異なる実数解の個数は 2、

$a=0$ のとき、方程式は $1=0$ だから、異なる実数解の個数は 0

X の確率分布は

X	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

ー(答)

X の期待値を $E(X)$ とすると

$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ ー(答)

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

X の分散を $V(X)$ とすると

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{17}{36}$ ー(答)

$\boxed{2}$

(1) $\triangle OAB$ において、余弦定理より

$b^2 = a^2 + 3^2 - 2 \cdot a \cdot 3 \cdot \cos\theta = a^2 + 9 - 6a\cos\theta$ ―(答)

$\triangle OAC$ において、余弦定理より

$c^2 = a^2 + 2^2 - 2 \cdot a \cdot 2 \cdot \cos\theta = a^2 + 4 - 4a\cos\theta$ ―(答)

(2) $\angle OCB = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ だから、$\triangle OCB$ において、正弦定理より、

$\frac{b}{\sin\frac{2}{3}\pi} = \frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}$ $\therefore b = \frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}} \times \sin\frac{2}{3}\pi = c \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}c$ ―(答)

(3) (2) より $b^2 = \frac{3}{2}c^2$ (1) の2式より

$a^2 + 9 - 6a\cos\theta = \frac{3}{2}(a^2 + 4 - 4a\cos\theta)$

$a^2 = 6$ $a > 0$ より $a = \sqrt{6}$ ―(答)

$\triangle OAC$ において、正弦定理より

$\frac{2}{\sin\angle AOC} = \frac{\sqrt{6}}{\sin\frac{\pi}{3}}$ $\therefore \sin\angle AOC = 2 \times \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sqrt{6}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 < \angle AOC < \frac{2}{3}\pi$ より $\angle AOC = \frac{\pi}{4}$ ―(答)

(4) $\triangle OAC$ の内角について、$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{12}\pi$ ―(答)

$\cos\frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$b^2 = (\sqrt{6})^2 + 9 - 6 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 15 - (9 - 3\sqrt{3}) = 6 + 3\sqrt{3}$

$b > 0$ より $b = \sqrt{6 + 3\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12 + 2\sqrt{27}}{2}} = \frac{\sqrt{9} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ ―(答)

$c^2 = (\sqrt{6})^2 + 4 - 4 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 10 - (6 - 2\sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}$

$c > 0$ より $c = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$ ―(答)

3

(1) $f(x)=x^3-(a+b)x^2+abx=x\{x^2-(a+b)x+ab\}=x(x-a)(x-b)\quad(0<a<b)$

よって $y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の座標は $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(b,0)$

また $f'(x)=3x^2-2(a+b)x+ab$ より

点 O において $f'(0)=ab$ であるから、$l_1: y=abx$ ―(答)

点 A において $f'(a)=a(a-b)$ であるから、$l_2: y=a(a-b)(x-a)$ ―(答)

点 B において $f'(b)=b(b-a)$ であるから、$l_3: y=b(b-a)(x-b)$ ―(答)

(2) $0\leqq x\leqq a$ において $f(x)\geqq 0$ であることに注意して $S_1=\int_0^a f(x)\,dx$

$a\leqq x\leqq b$ において $f(x)\leqq 0$ であることに注意して $S_2=\int_a^b -f(x)\,dx$

よって $S_1-S_2=\int_0^a f(x)\,dx-\int_a^b -f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^b f(x)\,dx$

ここで $\int_0^b f(x)\,dx=\int_0^b \{x^3-(a+b)x^2+abx\}\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+b}{3}x^3+\frac{ab}{2}x^2\right]_0^b$

$=-\frac{1}{12}b^4+\frac{1}{6}ab^3=\frac{b^3(2a-b)}{12}$

よって $S_1-S_2=\frac{b^3(2a-b)}{12}$ ―(答)

これより $2a>b$ のとき $S_1>S_2$, $2a=b$ のとき $S_1=S_2$, $2a<b$ のとき $S_1<S_2$ ―(答)

(3) $S_1=S_2$ のとき (2)より $2a=b$ このとき $B(2a,0)$

これを用いて (1)より l_1, l_2, l_3 を a のみで表すと

$l_1: y=2a^2x$, $l_2: y=-a^2(x-a)$, $l_3: y=2a^2(x-2a)$

l_1 と l_2 の交点の x 座標は $2a^2x=-a^2(x-a)$ より $3a^2x=a^3$ $a^2>0$ より $x=\frac{a}{3}$

このとき $y=2a^2\times\frac{a}{3}=\frac{2}{3}a^3$ $\therefore D\left(\frac{a}{3},\frac{2}{3}a^3\right)$ ―(答)

l_2 と l_3 の交点の x 座標は $-a^2(x-a)=2a^2(x-2a)$ より $3a^2x=5a^3$ $a^2>0$ より $x=\frac{5}{3}a$

このとき $y=-a^2\left(\frac{5}{3}a-a\right)=-\frac{2}{3}a^3$ $\therefore E\left(\frac{5}{3}a,-\frac{2}{3}a^3\right)$ ―(答)

また、四角形 OEBD の面積は x 軸により2つの三角形の面積の和として考えると

$T=\triangle OBD+\triangle OBE=\frac{1}{2}\times 2a\times\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}\times 2a\times\frac{2}{3}a^3=\frac{4}{3}a^4$

さらに、$S_1=S_2$ より $S_1+S_2=2S_1=2\int_0^a f(x)\,dx=2\times\frac{a^3(2b-a)}{12}=\frac{a^4}{2}$ $(\because b=2a)$

よって $\frac{S_1+S_2}{T}=\frac{\frac{1}{2}a^4}{\frac{4}{3}a^4}=\frac{3}{8}$ ―(答)

(4) (3)において 直線 BD の方程式は $y=-\frac{2}{5}a^2(x-2a)$ ―①

線分 BD 上に $F(x,y)$ $\left(\frac{a}{3}\leqq x\leqq 2a\right)$ とおき △OBF が S_1 と等しいとき

$\frac{1}{2}\times 2a\times y=\int_0^a f(x)\,dx$ すなわち $a\times\left\{-\frac{2}{5}a^2(x-2a)\right\}=\frac{a^4}{4}$

これを解くと $x=\frac{11}{8}a$ このとき ①より $y=\frac{1}{4}a^3$ $\therefore F\left(\frac{11}{8}a,\frac{1}{4}a^3\right)$ ―(答)

原点を通る直線 m は点 F を通るので、直線 m の方程式は $y=\frac{2}{11}a^2x$ ―(答)

$\boxed{4}$

$\boxed{1}$ と同じ

5

(1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-2x+6}$

$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2-2x+6)-(x-3)(2x-2)}{(x^2-2x+6)^2}=\dfrac{-x^2+6x}{(x^2-2x+6)^2}$

$=\dfrac{-x(x-6)}{(x^2-2x+6)^2}$　　$x^2-2x+6=(x-1)^2+5>0$ だから、

$f(x)$ の増減を調べると

x	$\cdots$	0	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

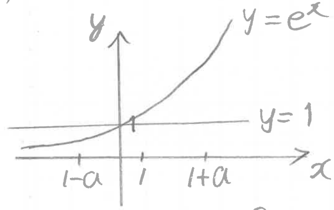
$f(0)=-\frac{1}{2}$、$f(6)=\frac{1}{10}$

また、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}}=0$、

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ だから、

$f(x)$ は $x=0$ のとき、最小値 $-\frac{1}{2}$、$x=6$ のとき、最大値 $\frac{1}{10}$ ―(答)

(2) $a\geqq 1$ のとき、$1-a\leqq 0$、$1+a>0$ だから、



$1-a\leqq x\leqq 0$ のとき $e^x-1\leqq 0$、

$0\leqq x\leqq 1+a$ のとき $e^x-1\geqq 0$

$f(a)=\displaystyle\int_{1-a}^{1+a}|e^x-1|\,dx$ とおくと

$f(a)=\displaystyle\int_{1-a}^{0}(-e^x+1)\,dx+\int_0^{1+a}(e^x-1)\,dx$

$=\left[-e^x+x\right]_{1-a}^{0}+\left[e^x-x\right]_0^{1+a}$

$=-1-(-e^{1-a}+1-a)+(e^{1+a}-1-a)-1$

$=e^{1+a}+e^{1-a}-4=e(e^a+e^{-a})-4$

$f'(a)=e(e^a-e^{-a})>0$ ($\because a\geqq 1$ より $e^a>e^{-a}$)

$a\geqq 1$ において、$f(a)$ は単調に増加する

$f(1)=e(e+e^{-1})-4=e^2-3$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}f(a)=\infty$ だから、

$\displaystyle\int_{1-a}^{1+a}|e^x-1|\,dx\geqq e^2-3$ (答)

(3) すべての自然数 n について

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{— ①}$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$(\sin x)^{(1)} = \frac{d}{dx}\sin x = \cos x 、\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$n=1$ のとき、① は成り立つ

[2] $n=k$ のとき、① が成り立つと仮定すると

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

$n=k+1$ のとき

$$(\sin x)^{(k+1)} = \frac{d}{dx}(\sin x)^{(k)} = \frac{d}{dx}\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

また、$\sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$

よって、$(\sin x)^{(k+1)} = \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$

$n=k+1$ のときも ① は成り立つ

[1]、[2] より、すべての自然数 n について ① は成り立つ

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(n+4)} &= \sin\left(x + \frac{(n+4)\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left\{\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2\pi\right\} \\ &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= (\sin x)^{(n)}\end{aligned}$$

よって、$(\sin x)^{(n)} = (\sin x)^{(n+4)}$

$\boxed{6}$

$\boxed{3}$ と同じ

7

(1) 点D$(0,0,1)$を中心とする球面をSとおく。3点A、B、CはS上の点なので

$|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DA}|$ より $|\overrightarrow{DB}|^2=|\overrightarrow{DA}|^2$ これより $(2-0)^2+(2-0)^2+(a-1)^2=(2-0)^2+(1-0)^2+(3-1)^2$

$\therefore (a-1)^2=1$ $a-1=\pm1$ $\therefore a=2,0$ $a>0$ より $a=2$ —(答)

$|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{DA}|$ より $|\overrightarrow{DC}|^2=|\overrightarrow{DA}|^2$ これより $(1-0)^2+(2-0)^2+(b-1)^2=(2-0)^2+(1-0)^2+(3-1)^2$

$\therefore (b-1)^2=4$ $b-1=\pm2$ $\therefore b=3,-1$ $b>0$ より $b=3$ —(答)

(2) (1)より A$(2,1,3)$, B$(2,2,2)$, C$(1,2,3)$, D$(0,0,1)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,2,2)-(2,1,3)=(0,1,-1)$ —(答)

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(1,2,3)-(2,1,3)=(-1,1,0)$ —(答)

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(0,0,1)-(2,1,3)=(-2,-1,-2)$ —(答)

平面T上の点Hは $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{AC}$ より実数s, tを用いて

$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ と表せ、このとき

$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ —①

$=s(0,1,-1)+t(-1,1,0)-(-2,-1,-2)=(-t+2,\ s+t+1,\ -s+2)$ —(答)

(3) $|\overrightarrow{AB}|^2=1^2+(-1)^2=2$, $|\overrightarrow{AC}|^2=(-1)^2+1^2=2$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0+1\times1+0=1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0+1\times(-1)+(-1)\times(-2)=1$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(-1)\times(-2)+1\times(-1)+0=1$ より

①を用いて

$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$ より $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ $\therefore (s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}=0$ $\therefore 2s+t-1=0$ —②

$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AC}$ より $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ $\therefore (s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AC}=0$ $\therefore s+2t-1=0$ —③

②+③より $3s+3t-2=0$ $\therefore s+t=\frac{2}{3}$

②−③より $s-t=0$ $\therefore s=t$ よって $s=t=\frac{1}{3}$

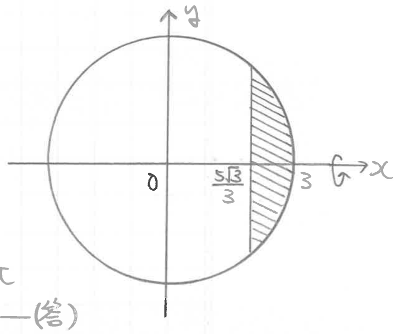
(2)の結果より $\overrightarrow{DH}=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$ —(答)

(4) (3)より球面Sの半径は$|\overrightarrow{DA}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$. また $|\overrightarrow{DH}|=\frac{5}{3}\sqrt{3}$

球面Sを平面Tによって2つの立体に分けたときの小さい方の立体の体積V_2は

右に示す半径3の円の斜線部をx軸のまわりに回転させたときの立体の体積と等しい。

円の方程式は $x^2+y^2=9$ より



$$V_2=\pi\int_{\frac{5\sqrt{3}}{3}}^{3}y^2dx=\pi\int_{\frac{5\sqrt{3}}{3}}^{3}(9-x^2)dx$$

$$=\pi\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{5\sqrt{3}}{3}}^{3}=\left(18+\frac{280\sqrt{3}}{27}\right)\pi$$ —(答)

よって $V_1=\frac{4}{3}\times\pi\times3^3-V_2$

$=36\pi-\left(18+\frac{280\sqrt{3}}{27}\right)\pi=\left(18-\frac{280\sqrt{3}}{27}\right)\pi$ —(答)

$\boxed{8}$

(1) $\boxed{1}$ (1) と同じ。

(2) $\boxed{5}$ (2) と同じ。

(3) (A) $\boxed{5}$ (3) と同じ。

(B) $\boxed{1}$ (3) (B) と同じ。

$\boxed{9}$

$\boxed{3}$ と同じ。

10

(1) $f(x)=8x^3-6x+1$ より $f'(x)=24x^2-6=6(4x^2-1)$

これより $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f(x)$ は $x=-\frac{1}{2}$ で極大値 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=8\times\left(-\frac{1}{8}\right)-6\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=3$ ―(答)

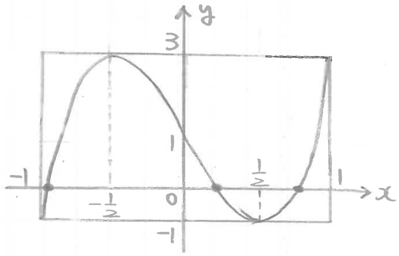
$x=\frac{1}{2}$ で極小値 $f\left(\frac{1}{2}\right)=8\times\frac{1}{8}-6\times\frac{1}{2}+1=-1$ ―(答)

をとる。

また、$f(x)$ は(極大値)>0,(極小値)<0 で 3次関数なので $y=f(x)$ のグラフは x 軸と3つの共有点をもつ。

さらに $f(1)=3>0$, $f(-1)=-1<0$ であることとグラフの増減表から、$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになり 方程式 $f(x)=0$ の異なる3解 α,β,γ は $-1<x<1$ に存在する。

よって $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$, $|\gamma|<1$ である。



(2) $8x^3-6x+1=0$ より $x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$ ―①

①は異なる3解 α,β,γ を解にもつので $x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ―②

右辺を展開して、左辺と係数比較すると

$\alpha+\beta+\gamma=0$ ―(答), $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{3}{4}$ ―(答), $\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{8}$ ―(答)

これらを用いて

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}$ ―(答)

また、①より $\alpha^3=\frac{3}{4}\alpha-\frac{1}{8}$, $\beta^3=\frac{3}{4}\beta-\frac{1}{8}$, $\gamma^3=\frac{3}{4}\gamma-\frac{1}{8}$

辺々の和をとると

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\frac{3}{4}(\alpha+\beta+\gamma)-\frac{3}{8}=0-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}$ ―(答)

(3) $a_n=\alpha^n$, $b_n=\beta^n$, $c_n=\gamma^n$ において

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k+c_k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha^k+\sum_{k=1}^{n}\beta^k+\sum_{k=1}^{n}\gamma^k$

各々の和は等比数列の和を表し (1)より $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$, $|\gamma|<1$ であるから無限等比級数は収束する。よって和は $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n=\frac{\alpha}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}-1$

同様に $\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n=\frac{\beta}{1-\beta}=\frac{1}{1-\beta}-1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma}{1-\gamma}=\frac{1}{1-\gamma}-1$

よって $\lim_{n\to\infty}S_n=\left(\frac{1}{1-\alpha}-1\right)+\left(\frac{1}{1-\beta}-1\right)+\left(\frac{1}{1-\gamma}-1\right)=\underbrace{\frac{(1-\beta)(1-\gamma)+(1-\alpha)(1-\gamma)+(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}}_{Ⓐ}-3$

(Ⓐの分母について) $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-0+\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{8}$ ($\because$ (2)より)

(Ⓐの分子について) $(1-\beta)(1-\gamma)+(1-\alpha)(1-\gamma)+(1-\alpha)(1-\beta)$

$=3-2(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$=3-2\times0+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{4}$ ($\because$ (2)より)

よって $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{8}}-3=6-3=3$ ―(答)

(4) $g(p)=|p-\alpha||p-\beta||p-\gamma|$ (ただし $-1\leqq p\leqq 1$)

ここで $(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)=\frac{1}{8}(8p^3-6p+1)$ (∵ ②に $x=p$ を代入した)

$=\frac{1}{8}f(p)$

と表せるので、

$g(p)=\left|\frac{f(p)}{8}\right|$ と表せる。

よって求める $g(p)$ がとりうる値の範囲は $-1\leqq p\leqq 1$ における $\left|\frac{f(p)}{8}\right|$ の最大・最小を求めればよい。

(1)で示した $y=f(x)$ のグラフを基に、$-1\leqq p\leqq 1$ における

$|f(p)|$ の最大値は $p=-\frac{1}{2}, 1$ のとき 3, $|f(p)|$ の最小値は p が $f(x)=0$ の解のとき 0

よって $0\leqq|f(p)|\leqq 3$, すなわち $0\leqq\left|\frac{f(p)}{8}\right|\leqq\frac{3}{8}$

ゆえに $0\leqq g(p)\leqq\frac{3}{8}$ —(答)

$\boxed{11}$

(1) 初期位置として $B_0=(0,2)$，点Dが円の中心なので $\overrightarrow{D_0B_0}=(0,1)$

図形Fはx軸の上を滑らないように時計回りに角θだけ回転するとき
$\overrightarrow{DB}=(\sin\theta, \cos\theta)$と表せる。

よって $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB}=(\theta,1)+(\sin\theta,\cos\theta)=(\theta+\sin\theta, 1+\cos\theta)$

したがって $B(\theta+\sin\theta, 1+\cos\theta)$ —(答)

また，$\theta=\pi$のとき．$\sin\pi=0$，$\cos\pi=-1$ であるから

$A_1(\pi,2)$，$B_1(\pi,0)$，$D_1(\pi,1)$ —(答)

さらに．初期位置として $C_0=(-1,1)$ より θ回転後 $\overrightarrow{DC}=(-\cos\theta, \sin\theta)$

$\theta=\pi$で $\overrightarrow{D_1C_1}=(1,0)$ より $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=(\pi,1)+(1,0)=(\pi+1,1)$

よって $C_1(\pi+1,1)$ —(答)

(2) Aが描く曲線 $J_1:\begin{cases}x=\theta-\sin\theta\\ y=1-\cos\theta\end{cases}$ において．$0<\theta<\pi$ に対し

$\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$　よって接線l_1の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ —①

また．(1)より Bが描く曲線 $k_1:\begin{cases}x=\theta+\sin\theta\\ y=1+\cos\theta\end{cases}$ において $0<\theta<\pi$に対し．

$\dfrac{dx}{d\theta}=1+\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$　よって接線l_2の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}$ —②

①，② より 2接線l_1, l_2の傾きの積は $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\times\dfrac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}=-1$

よって，2接線l_1, l_2は常に直交する。

(3) (2)より $l_1: y=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(\theta-\sin\theta)\}+1-\cos\theta$，$l_2: y=\dfrac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}\{x-(\theta+\sin\theta)\}+1+\cos\theta$

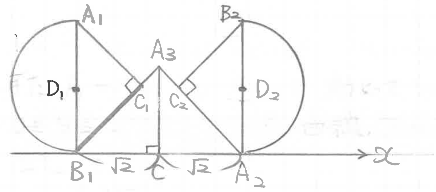
l_1とl_2の交点Pのx座標は．2直線l_1, l_2より yを消去して

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}x-\frac{(1+\cos\theta)(\theta-\sin\theta)}{\sin\theta}+1-\cos\theta=\frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta}x+\frac{\sin\theta(\theta+\sin\theta)}{1+\cos\theta}+1+\cos\theta$$

これより $x=\theta$　このとき $y=\dfrac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}+1+\cos\theta=1-\cos\theta+1+\cos\theta=2$

よって交点Pが描く図形は直線 $y=2$ —(答)

(4)



左図において．$B_1(\pi,0)$より

$A_2(\pi+2\sqrt{2}, 0)$，$B_2(\pi+2\sqrt{2}, 2)$

$C_2(\pi+2\sqrt{2}-1, 1)$　$D_2(\pi+2\sqrt{2}, 1)$ —(答)

点AがA_0からA_1まで動くときの曲線Jとx軸で囲まれる部分の面積をS_1
点AがA_1から上図のA_3まで動くときの曲線Jとx軸で囲まれる部分の面積をS_2
点AがA_3からA_2まで動くときの曲線Jとx軸で囲まれる部分の面積をS_3
とおくと

$$\begin{aligned}S=S_1+S_2+S_3&=\int_0^{\pi}y\,dx+(\text{扇形}A_1B_1A_3+\triangle A_3B_1C)+(\text{扇形}A_3CA_2)\\&=\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)^2d\theta+\left(\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{2}\right)\\&=\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{\cos2\theta}{2}\right)d\theta+\frac{\pi}{2}+1+\frac{\pi}{2}\\&=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\pi}+\pi+1=\frac{3}{2}\pi+\pi+1=\frac{5}{2}\pi+1\end{aligned}$$ —(答)