

1

(1) $P(x) = x^2 + ax + e$

$P(x) = x^2 + ax + e - (\text{答})$

$Q(x) = x^2 - ax + a^2 + a - e - (\text{答})$

$R(x) = (-a^3 - a^2 + 2ae)x + e^2 + e - a^2e - ae - (\text{答})$

$P(x^2)$ が $P(x)$ で割り切れるとき

$R(x) = 0$ が x についての恒等式となるので

$$\begin{cases} -a^3 - a^2 + 2ae = 0 & a \neq 0, e \neq 0 \text{ より } 2e = a^2 + a \\ e^2 + e - a^2e - ae = 0 & e = a^2 + a - 1 \end{cases}$$

よって $2(a^2 + a - 1) = a^2 + a \quad \therefore (a+2)(a-1) = 0$

$a = -2, 1 \quad a = -2$ のとき、 $e = 1$ 、 $a = 1$ のとき、 $e = 1$

$(a, e) = (-2, 1), (1, 1) - (\text{答})$

(2) $a_{n+1} + a_n = 4n - \text{①}$

$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = \gamma(a_n + \alpha n + \beta)$

$a_{n+1} - \gamma a_n = \alpha(\gamma-1)n + \beta(\gamma-1) - \alpha - \text{②}$

①、② が一致する条件は

$$\begin{cases} -\gamma = 1 \\ \alpha(\gamma-1) = 4 \\ \beta(\gamma-1) - \alpha = 0 \end{cases} \quad \text{よって、} \gamma = -1, \alpha = -2, \beta = 1 - (\text{答})$$

$a_{n+1} - 2(n+1) + 1 = -(a_n - 2n + 1)$

$\{a_n - 2n + 1\}$ は初項 $a_1 - 2 + 1 = 4$ 、公比 -1 の等比数列だから

$a_n - 2n + 1 = 4(-1)^{n-1} \quad \therefore a_n = 4(-1)^{n-1} + 2n - 1 - (\text{答})$

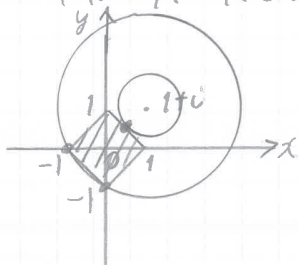
(3) (A) $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \leq 2$

$z = x + yi$ のとき、 $\bar{z} = x - yi$ だから

$|(x + yi) + (x - yi)| + |(x + yi) - (x - yi)| \leq 2$

$|2x| + |2iy| \leq 2 \quad \therefore |x| + |y| \leq 1 - (\text{答})$

4点 $1, -1, i, -i$ を頂点とする正方形の周および内部 - (答)



$|z - 1 - i| = |z - (1 + i)|$ は

2点 z と $1 + i$ の距離を表すので

$z = -1, -i$ のとき、最大値 $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} - (\text{答})$

$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ のとき、最小値 $\frac{\sqrt{2}}{2} - (\text{答})$

医学部に強い!60年の信頼と実績

学校法人
専修学校

北九州予備校



北予備公式HP

$$(B) \quad ax^2 - 2ax + 1 = 0$$

$a \neq 0$ のとき、判別式を D とすると

$$D/4 = a^2 - a = a(a-1)$$

$a = 1$ のとき $D/4 = 0$ だから、異なる実数解の個数は 1、

$a = -1$ のとき $D/4 = 2 > 0$ だから、異なる実数解の個数は 2、

$a = 0$ のとき、方程式は $1 = 0$ だから、異なる実数解の個数は 0

X の確率分布は

X の期待値を $E(X)$ とすると

X	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

-(答) $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ -(答)

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

X の分散を $V(X)$ とすると

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{7}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{17}{36} \text{ -(答)}$$

医学部に強い!60年の信頼と実績

学校法人
専修学校

北九州予備校



北予備公式HP

2

(1) $\triangle OAB$ において、余弦定理より

$$e^2 = a^2 + 3^2 - 2 \cdot a \cdot 3 \cdot \cos \theta = a^2 + 9 - 6a \cos \theta \quad \text{--- (答)}$$

 $\triangle OAC$ において、余弦定理より

$$c^2 = a^2 + 2^2 - 2 \cdot a \cdot 2 \cdot \cos \theta = a^2 + 4 - 4a \cos \theta \quad \text{--- (答)}$$

(2) $\angle OCB = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ だから、 $\triangle OCB$ において、正弦定理より、

$$\frac{e}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{c}{\sin \frac{\pi}{4}} \quad \therefore e = \frac{c}{\sin \frac{\pi}{4}} \times \sin \frac{2}{3}\pi = c \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}c \quad \text{--- (答)}$$

(3) (2) より $e^2 = \frac{3}{2}c^2$ (1)より2式より

$$a^2 + 9 - 6a \cos \theta = \frac{3}{2}(a^2 + 4 - 4a \cos \theta)$$

$$a^2 = 6 \quad a > 0 \text{ より } a = \sqrt{6} \quad \text{--- (答)}$$

 $\triangle OAC$ において、正弦定理より

$$\frac{2}{\sin \angle AOC} = \frac{\sqrt{6}}{\sin \frac{\pi}{3}} \quad \therefore \sin \angle AOC = 2 \times \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sqrt{6}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 < \angle AOC < \frac{2}{3}\pi \text{ より } \angle AOC = \frac{\pi}{4} \quad \text{--- (答)}$$

(4) $\triangle OAC$ の内角について、 $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{12}\pi$ --- (答)

$$\cos \frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$e^2 = (\sqrt{6})^2 + 9 - 6 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 15 - (9 - 3\sqrt{3}) = 6 + 3\sqrt{3}$$

$$e > 0 \text{ より } e = \sqrt{6 + 3\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12 + 2\sqrt{27}}{2}} = \frac{\sqrt{9 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \quad \text{--- (答)}$$

$$c^2 = (\sqrt{6})^2 + 4 - 4 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 10 - (6 - 2\sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$c > 0 \text{ より } c = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 \quad \text{--- (答)}$$

医学部に強い!60年の信頼と実績

学校法人
専修学校

北九州予備校



北予備公式HP

(1) $f(x) = x^3 - (a+b)x^2 + abx = x\{x^2 - (a+b)x + ab\} = x(x-a)(x-b)$ ($0 < a < b$)

よって $y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の座標は $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(b,0)$

また $f'(x) = 3x^2 - 2(a+b)x + ab$ より

点 O において $f'(0) = ab$ であるから $l_1: y = abx$ — (答)

点 A において $f'(a) = a(a-b)$ であるから $l_2: y = a(a-b)(x-a)$ — (答)

点 B において $f'(b) = b(b-a)$ であるから $l_3: y = b(b-a)(x-b)$ — (答)

(2) $0 \leq x \leq a$ において $f(x) \geq 0$ であることに注意して $S_1 = \int_0^a f(x) dx$

$a \leq x \leq b$ において $f(x) \leq 0$ であることに注意して $S_2 = \int_a^b -f(x) dx$

よって $S_1 - S_2 = \int_0^a f(x) dx - \int_a^b -f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx = \int_0^b f(x) dx$

よって $\int_0^b f(x) dx = \int_0^b \{x^3 - (a+b)x^2 + abx\} dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+b}{3}x^3 + \frac{ab}{2}x^2 \right]_0^b$
 $= -\frac{1}{12}b^4 + \frac{1}{6}ab^3 = \frac{b^3(2a-b)}{12}$

よって $S_1 - S_2 = \frac{b^3(2a-b)}{12}$ — (答)

これより $2a > b$ のとき $S_1 > S_2$, $2a = b$ のとき $S_1 = S_2$, $2a < b$ のとき $S_1 < S_2$ — (答)

(3) $S_1 = S_2$ のとき (2)より $2a = b$ このとき $B(2a, 0)$

これを用いて (1)より l_1, l_2, l_3 を a のみで表すと

$l_1: y = 2a^2x$, $l_2: y = -a^2(x-a)$, $l_3: y = 2a^2(x-2a)$

l_1 と l_2 の交点の x 座標は $2a^2x = -a^2(x-a)$ より $3a^2x = a^3$ $a^2 > 0$ より $x = \frac{a}{3}$

このとき $y = 2a^2 \times \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a^3$ $\therefore D(\frac{a}{3}, \frac{2}{3}a^3)$ — (答)

l_2 と l_3 の交点の x 座標は $-a^2(x-a) = 2a^2(x-2a)$ より $3a^2x = 5a^3$ $a^2 > 0$ より $x = \frac{5}{3}a$

このとき $y = -a^2(\frac{5}{3}a - a) = -\frac{2}{3}a^3$ $\therefore E(\frac{5}{3}a, -\frac{2}{3}a^3)$ — (答)

また、四角形 $OEBD$ の面積は x 軸により 2つの三角形の面積の和とて考えると

$T = \triangle OBD + \triangle OBE = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^4$

さらに $S_1 = S_2$ より $S_1 + S_2 = 2S_1 = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \times \frac{a^3(2b-a)}{12} = \frac{a^4}{2}$ ($\because b=2a$)

よって $\frac{S_1 + S_2}{T} = \frac{\frac{1}{2}a^4}{\frac{4}{3}a^4} = \frac{3}{8}$ — (答)

(4) (3)において 直線 BD の方程式は $y = -\frac{2}{5}a^2(x-2a)$ — ①

線分 BD 上に $F(x, y)$ ($\frac{a}{3} \leq x \leq 2a$) とおき $\triangle OBF$ が S_1 と等しいとき

$\frac{1}{2} \times 2a \times y = \int_0^a f(x) dx$ かわち $ax \{-\frac{2}{5}a^2(x-2a)\} = \frac{a^4}{4}$

これを解くと $x = \frac{11}{8}a$ このとき ①より $y = \frac{1}{4}a^3$ $\therefore F(\frac{11}{8}a, \frac{1}{4}a^3)$ — (答)

原点を通る直線 m は点 F を通るので、直線 m の方程式は $y = \frac{2}{11}a^2x$ — (答)

医学部に強い!60年の信頼と実績

学校法人 専修学校 **北九州予備校**



北予備公式HP

4

1と同じ

医学部に強い!60年の信頼と実績

学校法人
専修学校

北九州予備校



北予備公式HP

$$(1) f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x+6}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-2x+6) - (x-3)(2x-2)}{(x^2-2x+6)^2} = \frac{-x^2+6x}{(x^2-2x+6)^2}$$

$$= \frac{-x(x-6)}{(x^2-2x+6)^2} \quad x^2-2x+6 = (x-1)^2+5 > 0 \text{ だから}$$

$f(x)$ の増減を調べると

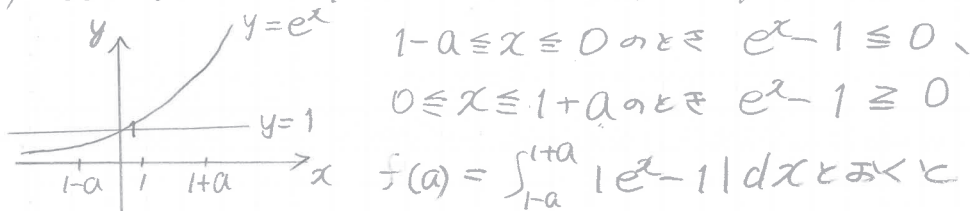
x	\dots	0	\dots	6	\dots
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	極小	\nearrow	極大	\searrow

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ だから}$$

$f(x)$ は $x=0$ のとき、最小値 $-\frac{1}{2}$ 、 $x=6$ のとき、最大値 $\frac{1}{10}$ (答)

(2) $a \geq 1$ のとき、 $1-a \leq 0$ 、 $1+a > 0$ だから。



$$1-a \leq x \leq 0 \text{ のとき } e^x - 1 \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 1+a \text{ のとき } e^x - 1 \geq 0$$

$$f(a) = \int_{-1+a}^{1+a} |e^x - 1| dx \text{ とおくと}$$

$$f(a) = \int_{-1+a}^0 (-e^x + 1) dx + \int_0^{1+a} (e^x - 1) dx$$

$$= [-e^x + x]_{-1+a}^0 + [e^x - x]_0^{1+a}$$

$$= -1 - (-e^{1-a} + 1 - a) + (e^{1+a} - 1 - a) - 1$$

$$= e^{1+a} + e^{1-a} - 4 = e(e^a + e^{-a}) - 4$$

$$f'(a) = e(e^a - e^{-a}) > 0 \quad (\because a \geq 1 \text{ より } e^a > e^{-a})$$

$a \geq 1$ において、 $f(a)$ は単調に増加する

$$f(1) = e(e + e^{-1}) - 4 = e^2 - 3$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = \infty \text{ だから}$$

$$\int_{-1+a}^{1+a} |e^x - 1| dx \geq e^2 - 3 \text{ (答)}$$



(2) すべての自然数 n について

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{--- ①}$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$(\sin x)^{(1)} = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$n=1$ のとき、① は成り立つ

[2] $n=k$ のとき、① が成り立つと仮定すると

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

$n=k+1$ のとき

$$(\sin x)^{(k+1)} = \frac{d}{dx} (\sin x)^{(k)} = \frac{d}{dx} \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\text{また、} \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\text{よって、} (\sin x)^{(k+1)} = \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

$n=k+1$ のときも ① は成り立つ

[1]、[2] より、すべての自然数 n について ① は成り立つ

$$(\sin x)^{(n+4)} = \sin\left(x + \frac{(n+4)\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left\{\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2\pi\right\}$$

$$= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= (\sin x)^{(n)}$$

$$\text{よって、} (\sin x)^{(n)} = (\sin x)^{(n+4)}$$

6

3 と同じ

医学部に強い!60年の信頼と実績

学校法人
専修学校

北九州予備校



北予備公式HP

(1) 点D(0,0,1)を中心とする球面を S とおく。3点A, B, Cは S 上の点なので

$$|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DA}| \quad \text{より} \quad |\overrightarrow{DB}|^2 = |\overrightarrow{DA}|^2 \quad \text{より} \quad (2-0)^2 + (2-0)^2 + (a-1)^2 = (2-0)^2 + (1-0)^2 + (3-1)^2$$

$$\therefore (a-1)^2 = 1 \quad a-1 = \pm 1 \quad \therefore a = 2, 0 \quad a > 0 \text{ より} \quad a = 2 \quad \text{--- (答)}$$

$$|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DA}| \quad \text{より} \quad |\overrightarrow{DC}|^2 = |\overrightarrow{DA}|^2 \quad \text{より} \quad (1-0)^2 + (2-0)^2 + (b-1)^2 = (2-0)^2 + (1-0)^2 + (3-1)^2$$

$$\therefore (b-1)^2 = 4 \quad b-1 = \pm 2 \quad \therefore b = 3, -1 \quad b > 0 \text{ より} \quad b = 3 \quad \text{--- (答)}$$

(2) (1)より A(2,1,3), B(2,2,2), C(1,2,3), D(0,0,1)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,2,2) - (2,1,3) = (0,1,-1) \quad \text{--- (答)}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (1,2,3) - (2,1,3) = (-1,1,0) \quad \text{--- (答)}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (0,0,1) - (2,1,3) = (-2,-1,-2) \quad \text{--- (答)}$$

平面 T 上の点 H は $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ より 実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad \text{と表せ, このとき}$$

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \quad \text{--- ①}$$

$$= s(0,1,-1) + t(-1,1,0) - (-2,-1,-2) = (-t+2, s+t+1, -s+2) \quad \text{--- (答)}$$

(3) $|\overrightarrow{AB}|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$, $|\overrightarrow{AC}|^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 + 1 \times 1 + 0 = 1$, $|\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{AC} =$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-2) = 1, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (-1) \times (-2) + 1 \times (-1) + 0 = 1 \quad \text{より}$$

①を用いて

$$\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB} \quad \text{より} \quad \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \therefore (s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \therefore 2s + t - 1 = 0 \quad \text{--- ②}$$

$$\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC} \quad \text{より} \quad \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad \therefore (s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad \therefore s + 2t - 1 = 0 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{②} + \text{③} \text{ より} \quad 3s + 3t - 2 = 0 \quad \therefore s + t = \frac{2}{3}$$

$$\text{②} - \text{③} \text{ より} \quad s - t = 0 \quad \therefore s = t \quad \text{よって} \quad s = t = \frac{1}{3}$$

$$(2) \text{の結果より} \quad \overrightarrow{DH} = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right) \quad \text{--- (答)}$$

(4) (3)より 球面 S の半径は $|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$. また $|\overrightarrow{DH}| = \frac{5}{3}\sqrt{3}$

球面 S を平面 T により2つの立体に分けたときの小さい方の立体の体積 V_2 は

右に示す半径3の円の斜線部を x 軸のまわりに

回転させたときの立体の体積と等しい。

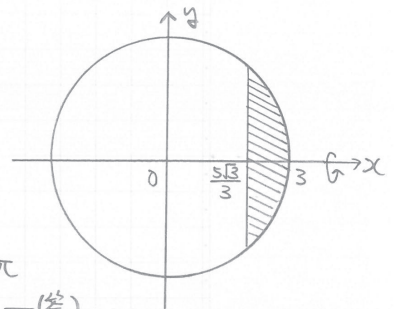
円の方程式は $x^2 + y^2 = 9$ より

$$V_2 = \pi \int_{\frac{5\sqrt{3}}{3}}^3 y^2 dx = \pi \int_{\frac{5\sqrt{3}}{3}}^3 (9 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{5\sqrt{3}}{3}}^3 = \left(18 - \frac{280\sqrt{3}}{27} \right) \pi \quad \text{--- (答)}$$

$$\text{よって} \quad V_1 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 - V_2$$

$$= 36\pi - \left(18 - \frac{280\sqrt{3}}{27} \right) \pi = \left(18 + \frac{280\sqrt{3}}{27} \right) \pi \quad \text{--- (答)}$$



8

(1) 1 (1) と同じ。

(2) 5 (2) と同じ。

(3) (A) 5 (3) と同じ。

(B) 1 (3) (B) と同じ。

9

3 と同じ。

医学部に強い!60年の信頼と実績

学校法人
専修学校

北九州予備校



北予備公式HP

(1) $f(x) = 8x^2 - 6x + 1$ より $f'(x) = 24x - 6 = 6(4x - 1)$

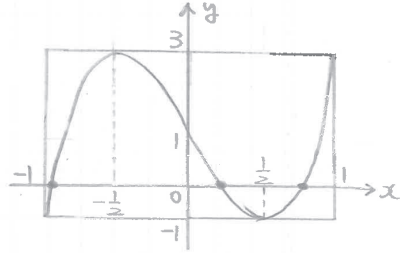
これより $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	...	$-\frac{1}{2}$...	$\frac{1}{2}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗ 極大		↘ 極小	

$f(x)$ は $x = -\frac{1}{2}$ で極大値 $f(-\frac{1}{2}) = 8 \times (-\frac{1}{2}) - 6 \times (-\frac{1}{2}) + 1 = 3$ (答)
 $x = \frac{1}{2}$ で極小値 $f(\frac{1}{2}) = 8 \times \frac{1}{8} - 6 \times \frac{1}{2} + 1 = -1$ (答)
 とする。

また、 $f(x)$ は (極大値) > 0 , (極小値) < 0 で、3次関数なので、 $y = f(x)$ のグラフは x 軸と3つの共有点をもつ。

さらに $f(1) = 3 > 0$, $f(-1) = -1 < 0$ であることと、
 グラフの増減表から、 $y = f(x)$ のグラフの概形は右図のようになり、方程式 $f(x) = 0$ の異なる3解 α, β, γ は $-1 < x < 1$ に存在する。
 よって $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$, $|\gamma| < 1$ である。



(2) $8x^3 - 6x + 1 = 0$ より $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$ — ①

① は異なる3解 α, β, γ を解にもつので $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ — ②
 右辺を展開して、左辺と係数比較すると

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ (答), $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{3}{4}$ (答), $\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{8}$ (答)

これらを用いて

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0 - 2 \times (-\frac{3}{4}) = \frac{3}{2}$ (答)

また、①より $\alpha^3 = \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{8}$, $\beta^3 = \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{8}$, $\gamma^3 = \frac{3}{4}\gamma - \frac{1}{8}$

両者の和をとると

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \frac{3}{4}(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{3}{8} = 0 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$ (答)

(3) $a_n = \alpha^n$, $b_n = \beta^n$, $c_n = \gamma^n$ において

$S_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k + c_k) = \sum_{k=1}^n \alpha^k + \sum_{k=1}^n \beta^k + \sum_{k=1}^n \gamma^k$

各々の和は等比数列の和を表し、(1)より $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$, $|\gamma| < 1$ であるから、無限等比級数は収束する。よって和は $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} - 1$

同様に $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n = \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{1}{1-\beta} - 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n = \frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{1}{1-\gamma} - 1$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (\frac{1}{1-\alpha} - 1) + (\frac{1}{1-\beta} - 1) + (\frac{1}{1-\gamma} - 1) = \frac{(1-\beta)(1-\gamma) + (1-\alpha)(1-\gamma) + (1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} - 3$

(A) の分母について (1- α)(1- β)(1- γ) = 1 - ($\alpha + \beta + \gamma$) + ($\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$) - $\alpha\beta\gamma$
 = 1 - 0 + (- $\frac{3}{4}$) - (- $\frac{1}{8}$) = $\frac{3}{8}$ (∵ (2)より)

(A) の分子について (1- β)(1- γ) + (1- α)(1- γ) + (1- α)(1- β)
 = 3 - 2($\alpha + \beta + \gamma$) + $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
 = 3 - 2 × 0 + (- $\frac{3}{4}$) = $\frac{9}{4}$ (∵ (2)より)

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{8}} - 3 = 6 - 3 = 3$ (答)



$$(4) g(p) = |p-\alpha||p-\beta||p-\gamma| \quad (\text{ただし } -1 \leq p \leq 1)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } (p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma) &= \frac{1}{8}(8p^3 - 6p + 1) \quad (\because \text{②に } x=p \text{ を代入した}) \\ &= \frac{1}{8} f(p) \end{aligned}$$

と表せるので、

$$g(p) = \left| \frac{f(p)}{8} \right| \text{ と表せる。}$$

よって求める $g(p)$ がとらえる値の範囲は $-1 \leq p \leq 1$ における $\left| \frac{f(p)}{8} \right|$ の最大・最小を求めればよい。

(1) で示した $y = f(x)$ のグラフを基に、 $-1 \leq p \leq 1$ における

$|f(p)|$ の最大値は $p = -\frac{1}{2}, 1$ のとき 3, $|f(p)|$ の最小値は p が $f(x) = 0$ の解のとき 0

$$\text{よって } 0 \leq |f(p)| \leq 3. \quad \text{すなわち } 0 \leq \left| \frac{f(p)}{8} \right| \leq \frac{3}{8}$$

$$\text{ゆえに } 0 \leq g(p) \leq \frac{3}{8} \quad \text{--- (答)}$$

医学部に強い!60年の信頼と実績

学校法人
専修学校

北九州予備校



北予備公式HP

(1) 初期位置として $B_0 = (0, 2)$, 点Dが円の中心なので $\overrightarrow{D_0 B_0} = (0, 1)$

図形Fはx軸の上を滑らないように時計回りに角 θ だけ回転すると
 $\overrightarrow{DB} = (\sin\theta, \cos\theta)$ と表せる。

よって $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} = (0, 1) + (\sin\theta, \cos\theta) = (\theta + \sin\theta, 1 + \cos\theta)$

したがって $B(\theta + \sin\theta, 1 + \cos\theta)$ — (答)

また $\theta = \pi$ のとき $\sin\pi = 0, \cos\pi = -1$ であるから

$A_1(\pi, 2), B_1(\pi, 0), D_1(\pi, 1)$ — (答)

さらに、初期位置として $C_0 = (-1, 1)$ より θ 回転後 $\overrightarrow{DC} = (-\cos\theta, \sin\theta)$

$\theta = \pi$ で $\overrightarrow{DC_1} = (1, 0)$ より $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{D_1 C_1} = (\pi, 1) + (1, 0) = (\pi + 1, 1)$

よって $C_1(\pi + 1, 1)$ — (答)

(2) Aが描く曲線 $J_1: \begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$ において $0 < \theta < \pi$ に対し

$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta, \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$ よって接線 l_1 の傾きは $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$ — ①

また、①よりBが描く曲線 $k_1: \begin{cases} x = \theta + \sin\theta \\ y = 1 + \cos\theta \end{cases}$ において $0 < \theta < \pi$ に対し

$\frac{dx}{d\theta} = 1 + \cos\theta, \frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta$ よって接線 l_2 の傾きは $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\sin\theta}{1 + \cos\theta}$ — ②

①、②より2接線 l_1, l_2 の傾きの積は $\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \times \frac{-\sin\theta}{1 + \cos\theta} = -1$

よって、2接線 l_1, l_2 は常に直交する。

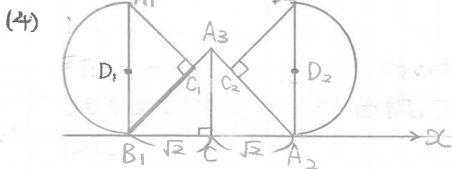
(3) (2)より $l_1: y = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \{x - (\theta - \sin\theta)\} + 1 - \cos\theta, l_2: y = \frac{-\sin\theta}{1 + \cos\theta} \{x - (\theta + \sin\theta)\} + 1 + \cos\theta$

l_1 と l_2 の交点Pのx座標は、2直線 l_1, l_2 より y を消去して

$\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} x - \frac{(1 + \cos\theta)(\theta - \sin\theta)}{\sin\theta} + 1 - \cos\theta = \frac{-\sin\theta}{1 + \cos\theta} x + \frac{\sin\theta(\theta + \sin\theta)}{1 + \cos\theta} + 1 + \cos\theta$

これより $x = \theta$ このとき $y = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} + 1 + \cos\theta = 1 - \cos\theta + 1 + \cos\theta = 2$

よって交点Pが描く図形は直線 $y = 2$ — (答)



左図において $B_1(\pi, 0)$ より

$A_2(\pi + 2\sqrt{2}, 0), B_2(\pi + 2\sqrt{2}, 2)$

$C_2(\pi + 2\sqrt{2} - 1, 1), D_2(\pi + 2\sqrt{2}, 1)$ — (答)

— (答)

点Aが A_0 から A_1 まで動くときの曲線Jとx軸で囲まれる部分の面積を S_1

点Aが A_1 から上の A_3 まで動くときの曲線Jとx軸で囲まれる部分の面積を S_2

点Aが A_3 から A_2 まで動くときの曲線Jとx軸で囲まれる部分の面積を S_3

とおく。

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 = \int_0^\pi y \, dx + (\text{扇形 } A_1 B_1 A_3 + \triangle A_3 B_1 C) + (\text{扇形 } A_3 C A_2) \\ &= \int_0^\pi (1 - \cos\theta)^2 d\theta + \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2}\right) d\theta + \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{2} \\ &= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^\pi + \pi + 1 = \frac{3}{2}\pi + \pi + 1 = \frac{5}{2}\pi + 1 \text{ — (答)} \end{aligned}$$

